Nombres Complexes

ERRATA

Aminetou Elemine Ahaimed
Salimed sidi Mohamed
Khadjetou SKhair Ahmed

7C

2016 - 2017

groupes C_2

Exercice 3

Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants:

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$ 3) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$ 5) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Solution

	Relation Complexe	Nature du triangle ABC	Justification
1	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	Equilateral	Car $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2	$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$	rectangle isocèle en B	Car le rapport $= i$
3	$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	equilateral	car $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
4	$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$	rectangle en C	immaginaire pure
5	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	isocèle en A	$\left\lvert \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rvert = 1$

Nombres Complexes

ERRATA

Aminetou Elemine Ahaimed
Fatimetou Sidi Mohamed
Khadjetou SKhair Ahmed

7C 2016-2017

groupes C2

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.
2) En déduire le module et un argument de a.
3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Solution

① on a : $a^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$a^2 = -\frac{2\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{a^2 = -\sqrt{3}+i}$

- Module : $|a^2| = |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2| = 2$
- Argument : Soit θ un réel telque $\arg a^2 = \theta$

Alors : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg a^2 = \frac{5\pi}{6}$

② Module et argument de a :

- Module : $|a^2| = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$
- Argument : $\arg a^2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\arg a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\arg a = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \{0, 1\}$

Soit $k = 0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$

Soit $k = 1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$

Comme $Re(a) > 0$ et $Im(a) > 0$, $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$

Enfin , $\boxed{\arg a = \frac{5\pi}{12}}$ ①

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n = K\pi$ où $K \in \mathbb{Z}$:

$$\arg a^n = K\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = K\pi \Leftrightarrow 5n = 12K \Leftrightarrow \boxed{n = \frac{12K}{5}}$$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc K est divisible par 5.

On prend $K = 5K'$ avec $K' \in \mathbb{Z}$

$$\arg a^n = K\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{K}{5} \Leftrightarrow n = 12K'$$

Alors, l'ensemble des valeurs de n telque a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Nombres Complexes

ERRAJA

Aminetou Elemine Ahaïmed
Satimetou Sidi Mohamed
Khadjetou Skhair Ahmed

7C
2016-2017
groupes C_2

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $z^{2016} = \bar{z}$

Solution

E : $z^{2016} = \bar{z}$

on remarque que 0 est un solution de E (solution evidente)

On supose dans la suite que $z \neq 0$

$E \Rightarrow |z^{2016}| = |\bar{z}| \Rightarrow |z|^{2016} = |z|$

on divise par $|z| \Rightarrow |z|^{2015} = 1$

$\Rightarrow |z| = 1$ car $|z| \in \mathbb{R}_+^*$

On multiplie E par z :

$z \cdot z^{2016} = z \cdot \bar{z} \Rightarrow z^{2017} = z\bar{z}$ or $z\bar{z} = |z|^2$ donc $\boxed{z^{2017} = 1}$

Racine n eme de lumite

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2017}}$ $\quad k \in \{0, 1, \dots, 2016\}$

$z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{2017}}$

Conclusion : E admet 2018 solution distinct.

$$\boxed{S = \{0, z_0, z_0 \dots z_{2016}\}}$$

Nombres Complexes ERRATA

Aminetou Elemine Ahmed
Salimetou Sidi Mohamed
Khadjetou Skhair Ahmed
groupes C_2

7C 2016 - 2017

Exercice 12

α et x sont deux réels ; et n entier $n \geq 1$.

1) Simplifier les expressions suivantes:

$$C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$$

2) En déduire :

$$C'_n = \cos(x+\alpha) + 2\cos(2x+\alpha) + \cdots + n\cos(nx+\alpha)$$

$$S'_n = \sin(x+\alpha) + 2\sin(2x+\alpha) + \cdots + n\sin(nx+\alpha)$$

Solution

1

$$C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$$

$$C_n + iS_n = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos(x+\alpha) + i\sin(x+\alpha)) + (\cos(2x+\alpha) + i\sin(2x+\alpha)) + \cdots + (\cos(nx+\alpha) + i\sin(nx+\alpha))$$

$$C_n + iS_n = e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+x)} + e^{i(\alpha+2x)} + \cdots + e^{i(\alpha+nx)}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx}\right]$$

$$\boxed{C_n + iS_n = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}}$$

2 En deduire:

$$C'_n = \cos(x+\alpha) + 2\cos(2x+\alpha) + \cdots + n\cos(nx+\alpha)$$

$$S'_n = \sin(x+\alpha) + 2\sin(2x+\alpha) + \cdots + n\sin(nx+\alpha)$$

$$e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{i3x} + \cdots + ne^{inx}$$

1

$$e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx} = C_n + iS_n = K_n$$

$$e^{i2x} + e^{i3x} + \dots + e^{inx} = K_n - e^{ix}$$

$$e^{i3x} + e^{i4x} + \dots + e^{inx} = K_n - e^{ix} - e^{i2x}$$

$$e^{inx} = K_n - K_{n-1}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} K_{n-k}$$

Nombres Complexes

Aminetou Elemine Ahaimed
Fatimetou Sidi Mohamed
Khadjetou Skhair Ahmed
groupes C2

ERRATA

7C

2016 - 2017

Exercice 15

Montrer que les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si
$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1$.

Solution

$M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ $M_3(z_3)$

M_1, M_2 et M_3 sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}) = 0\ [\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \left(\overline{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}\right) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_3}}{\overline{z_1} - \overline{z_3}}$$

$$\Leftrightarrow (z_2 - z_3)(\overline{z_1} - z_3) = (z_1 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})$$

$$\Leftrightarrow z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_3} - z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_3} = z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3} - z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1}$$

Nombres Complexes

ERRATA

Aminetou Elemine Ahaïmed
Fatimetou Sidi Mohamed
Khadjetou Skhair Ahmed

7C

groupes C_2

2016-2017

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives 1+5i ;-1+i et 3i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{3iz+6+4i}{z-3i}$. On note f(M)=M'.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|z'|=3$

b) $|z'-3i|=3$

c) $z'\in\mathbb{R}$

d) $\arg z'=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

e) $\arg z'=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$.

2) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés.

Solution

① L'ensemble de point

ⓐ soit E_1 l'ensemble des points M du plan telque $|z'|=3$

on a : $|z'|=3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}\right|=3$ Alors $\left|\frac{3i\left(z+\frac{6+4i}{3i}\right)}{z-3i}\right|=3$

d'où $|3i|\left|\frac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}\right|=3$

$\left|\frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}\right|=1$. E_1 donc, est la mediatrice du segment $[DC]$ où $D\left(-\frac{4}{3},2\right)$.

ⓑ

(b) Soit E_2 l'ensemble des points M du plan telque $|z'-3i|=3$

on a : $|z'-3i|=3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}-3i\right|=3$

$\Leftrightarrow \left|\frac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i}\right|=3$

$\left|\frac{-3+4i}{z-3i}\right|=3 \Leftrightarrow \frac{5}{|z-3i|}=3 \Leftrightarrow |z-3i|=\frac{5}{3}$

Soit $|z_M-z_C|=\frac{5}{3}$

E_2 donc, est le cercle de centre C et de rayon $\frac{5}{3}$

(c) Soit E_3 l'ensemble des points M du plan telque $z'\in\mathbb{R}$

on a : $z'\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z'=0 \text{ ou } \arg\frac{3iz+6+4i}{z-3i}=0[\pi]\right)$

Soit $z'=0 \Leftrightarrow 3iz+6+4i=0 \Leftrightarrow z=-\frac{4}{3}+2i \Leftrightarrow M=D$

Soit $\arg\frac{3iz+6+4i}{z-3i}=0[\pi] \Leftrightarrow (\vec{MC},\vec{MD})=\frac{\pi}{2}[\pi]$

M appartient au cercle de diamètre [CD] privé de C et D.

En particulier si M est en D, $z'=0$

Enfin, E_3 est le cercle de diametre [CD] privé de C.

(d) Soit E_4 l'ensemble des points M du plan telque $\arg z'=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

on a : $\arg z'=\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \arg 3i+\arg\frac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+\arg\frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

(2)

$$\Leftrightarrow \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

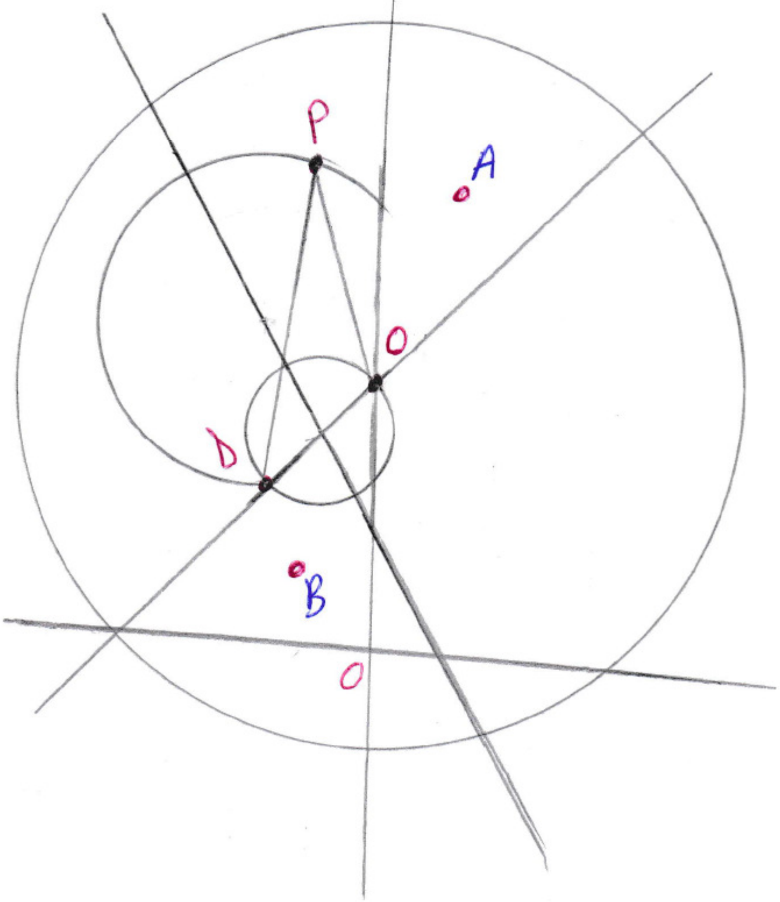
E_4 donc, est un arc (de sens indirect) d'un cercle d'extrémité C et D exclus.

(e) Soit E_5 l'ensemble des points M du plan tel que $\arg z' = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a :

$$\arg z' = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z - 3i} = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$$

E_5 donc, est la droite (CD) privée de C et D



③

2) pour montrer que les points A, B, C, M et M' sont cocycliques ou alignés, il suffit de montrer que le nombre Z tel que :

$$Z = \frac{z' - z_A}{z' - z_B} \times \frac{z - z_B}{z - z_A} \text{ soit réel.}$$

on a : $$Z = \frac{\frac{3iz+6+4i}{z-3i} - 1 - 5i}{\frac{3iz+6+4i}{z-3i} + 1 - i} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{\frac{3iz+6+4i-z+3i-5iz-15}{z-3i}}{\frac{3iz+6+4i+z-3i-iz-3}{z-3i}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{-2iz-z+7i-9}{2iz+z+i+3} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{(-2i-1)z+7i-9}{(2i+1)z+i+3} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{(-2i-1)\left(z + \frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{(2i+1)\left(z + \frac{i+3}{2i+1}\right)} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-\left(z + \frac{7i-9}{-2-1}\right)}{z + \frac{i+3}{2i+1}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$\boxed{Z = \frac{-(z-1-5i)}{z+1-i} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}}$$

$Z = -1$ d'où $Z \in \mathbb{R}^*$

Alors les points A, B, C, M et M' sont cocyclique ou alignés.

4

Nombres Complexes ERRATA

Aminetou Elemine Ahmed
Fatimetou Sidi Mohamed
Khadjetou Skhair Ahmed
groupes C_2

7C 2016-2017

Exercice 21 Bac

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A , le rapport et un angle de f.

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-1,-3) par f. Vérifier que le triangle ABC est rectangle. Placer les points A , B et C sur la figure.

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$.

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2+3MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles Γ_2 et Γ_3 ?

Solution

1 a) $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$

$P(2i)=(2i)^3+(2-2i)(2i)^2+(-2-8i)(2i)-8+4i=0$

$\Leftrightarrow \boxed{P(2i)=0}$

$P(z)= \Leftrightarrow \quad P(z)=(z-2i)(z^2+2a+b)$

	1	2-2i	-2-8i	-8+4i
2i		2i	4i	8-4i
	1	2	-2-4i	0

$$\boxed{P(z)=(z-2i)(z^2+2z-2-4i)}$$

1

$\Delta = 4 - 4(-2-4i) = 12 + 16$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 20 \\ x \text{ et } y \text{ de m̂ signe} \end{cases}$ $\Leftrightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \boxed{x = 4}$

$\Leftrightarrow 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{y = 2}$

$$\boxed{\delta = 4 + 2i}$$

$z_1 = \frac{-2+4+2i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i \Leftrightarrow \boxed{z_1 = 1+i}$

$z_2 = \frac{-2-4-2i}{2} = \frac{-6-2i}{2} = -3-i \Leftrightarrow \boxed{z_2 = -3-i}$

$$S = \{2i, 1+i; -3-i\}$$

② $f(M) = M \Leftrightarrow z' = \frac{1}{3z} + \frac{2}{3} + 2i$ $\boxed{az+b}$

ⓐ Montrer que f est une similitude directe :

Comme $|a| = \left|\frac{1}{3}\right| \neq 1$ alors f est similitude directe de centre A.

$z_A = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3} + 2i}{1 - \frac{1}{3}i} \Leftrightarrow \boxed{z_A = 2i}$

Rapport $K = |a| = \frac{1}{3}$

Angle $\theta = \arg a = \arg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{f\left(A, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

②

b) Calculer z_C tel que $C = f(B)$

$f(M) = M' \Rightarrow z' = \frac{1}{3} i z + \frac{2}{3} + 2i$

$f(B) = C \Rightarrow z_C = \frac{1}{3} i z_B + \frac{2}{3} + 2i$

$z_C = \frac{1}{3} i (-1-3i) + \frac{2}{3} + 2i = -\frac{1}{3} i + 1 + \frac{2}{3} + 2i$

$z_C = 2i - \frac{1}{3} i + 1 + \frac{2}{3} = \frac{6i - i}{3} + \frac{3+2}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{z_C = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} i}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} i - 2i}{-1 - 3i - 2i} = \frac{5 - i}{3(-1-5i)}$$

$$= \frac{i(-5i-1)}{3(-1-3i)} = \frac{1}{3} i$$

Immaginaire donc (A, B, C) rectangle en A

c) Determiner z_G

$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & 3 & -1 \end{array}$ $\quad z_G = \frac{2z_A + 3z_B - z_C}{2+3-1}$

$$z_G = \frac{4i - 3 - 9i - \frac{5}{3} - \frac{5}{3} i}{4}$$

$$\boxed{z_G = \frac{-7}{6} - \frac{10}{6} i}$$

3